CLASE 6. El Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes es una generalización del Teorema de Green (Teoremas 5.2, 5.4 y 5.7) al espacio $\mathbb{R}^3$, aplicándose a superficies orientadas que son *encerradas* (acotadas) por curvas cerradas (en $\mathbb{R}^3$). El principal problema que se presenta al intentar tal generalización es: *¿cual es la orientación adecuada que debe darse tanto a la superficie como a la curva que la encierra*? Comenzaremos enunciando el teorema para el caso de superficies que son gráficas de funciones de dos variables, explicando cual es la orientación adecuada en este caso, para luego pasar al caso más general de superficies parametrizadas.

Partimos entonces de una superficie S que es la gráfica de una función, digamos $z = f(x, y)$, y que podemos parametrizar, como ya sabemos, mediante una función $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, pidiendo adicionalmente que $\mathcal{D}$ sea una región (plana) a la que podemos aplicarle el Teorema de Green y que su frontera $\partial\mathcal{D}$ sea una curva cerrada simple orientada positivamente. Adicionalmente requeriremos, temporalmente, que la superficie S esté *orientada hacia arriba* (conviene recordar que de acuerdo a la Observación 1.6, las superficies del tipo $z = f(x, y)$ tienen dos orientaciones posibles: la correspondiente al campo vectorial normal unitario que apunta hacia arriba y la de dirección opuesta, es decir, la del campo vectorial normal unitario que apunta hacia abajo) y, en consecuencia, ϕ preserva la orientación de S (¿notó, en la observación citada, el signo de la tercera componente del Producto Vectorial Fundamental?).

La curva frontera ∂S se define como la curva cerrada simple que es imagen, a través de ϕ, de la curva (plana) $\partial\mathcal{D}$. Así, si $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de $\partial\mathcal{D}$ que conserva la orientación (positiva) de $\partial\mathcal{D}$ (la orientación del Teorema 5.2), entonces ∂S es la imagen de la trayectoria $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ determinada por

$$\gamma(t) = (\phi \circ \sigma)(t) = (x(t)\, ,\, y(t)\, ,\, f(x(t), y(t))).$$

Más aún, la orientación apropiada que debe darse a la curva ∂S, cuando S ha sido orientada hacia arriba, es la orientación inducida por $\gamma(t)$[1] (es decir, por $\partial\mathcal{D}$). De esta manera, cuando S está orientada hacia arriba, la superficie S debe quedar a la izquierda al movernos sobre ∂S. Por supuesto, si la orientación de S es la contraria (es decir, hacia abajo) entonces debe cambiarse

[1]Entendida como la orientación que va desde el punto inicial $\gamma(a)$ al punto final $\gamma(b)$.

la orientación de ∂S. Esta manera de hacer corresponder la orientación de la superficie S con la orientación de la curva ∂S es lo que se conoce como la Regla de la Mano Derecha.

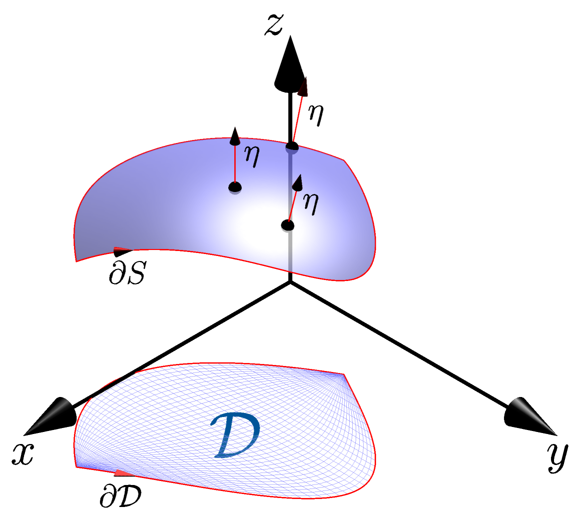

Figura 1: Orientación adecuada para que el Teorema de Stokes sea válido (Regla de la mano derecha).

Teorema 6.1 (Stokes para el caso de Gráficas)**.** *Sea S la superficie orientada definida por una función de clase $\mathcal{C}^2$, $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$ y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en S. Si ∂S denota la curva frontera que acota a S, orientada conforme a la regla de la mano derecha, entonces*

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Recordemos que $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\eta}\, d\mathbf{S}$. Así el teorema de Stokes afirma que la integral de la componente normal del rotor de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre una superficie S es igual a la integral de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ alrededor de la (curva) frontera ∂S.

La demostración puede verse, por ejemplo, en el libro *Cálculo Vectorial* de Marsden-Tromba, simplemente realizando los cálculos que se indican al suponer $F = (P, Q, R)$, la parametrizacón de ∂S dada por $\eta(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ y aplicaciones de la regla de la cadena y del teorema de Green.

A continuación enunciaremos el teorema para superficies parametrizadas generales.

Teorema 6.2 (Stokes Para Superficies Parametrizadas)**.** *Sea S una superficie parametrizada suave, orientada con normal η, parametrizada por una función $\phi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ inyectiva de clase $\mathcal{C}^1$. Si*

∂S denota la curva frontera que acota a S (entendida como la imagen, a través de ϕ, de la curva (plana) $\partial\mathcal{D}$), orientada conforme a la regla de la mano derecha y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de $\mathcal{C}^1$ en S, entonces

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Ejemplo 6.3. Sea C la curva intersección entre las superficies de ecuación $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + (y-1)^2 = 1$ con orientación anti-horaria vista desde arriba. Si el campo vectorial $\mathbf{F}$ está dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$.

Solución. El cilindro corta sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$ una superficie S acotada por C, como se muestra en la Figura 2. Se cumplen las condiciones del teorema de Stokes, $\mathbf{F}$ es $\mathcal{C}^1$ y la orientación inducida $\boldsymbol{\eta}$ en S es hacia arriba.

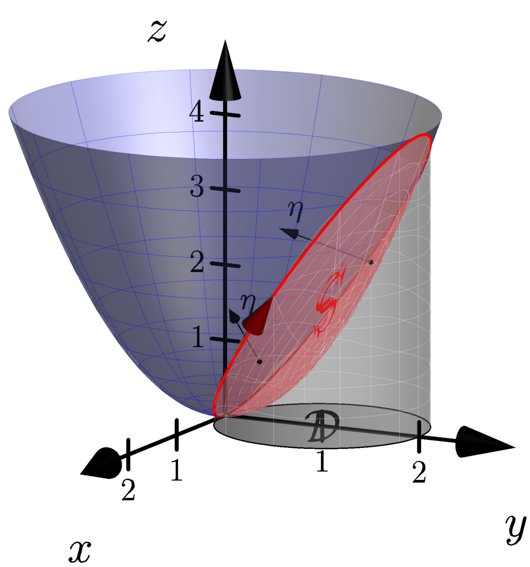

Figura 2: Intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Parametrizamos el paraboloide $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ mediante $\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, tomando como dominio $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \leq 1\}$. Con ésta parametrización resulta $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (-f_x\,,\ -f_y\,,\ 1) = (-2x, -2y, 1)$, de donde concluimos que ϕ preserva la orientación de S ($\boldsymbol{\eta}$ apunta hacia arriba). Calculamos $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = (0, 0, -2)$ y aplicando el teorema de Stokes tenemos

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} (0,0,-2)\cdot(-2x,-2y,1)\,dx\,dy$$
$$= -2\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy = -2\,\text{Area}(\mathcal{D}) = -2\pi.$$

Ejemplo 6.4. Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2y+z, x+z, x+y)$ y C la curva intersección del plano $z=y$ con el cilindro $x^2+y^2=2y$, con sentido anti-horario vista desde abajo.

Solución. Fácilmente calculamos $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = (0,0,-1)$. La curva C encierra una superficie S acotada sobre el plano $z=y$, como se muestra en la Figura 3, con orientación $\boldsymbol{\eta}$ hacia abajo.

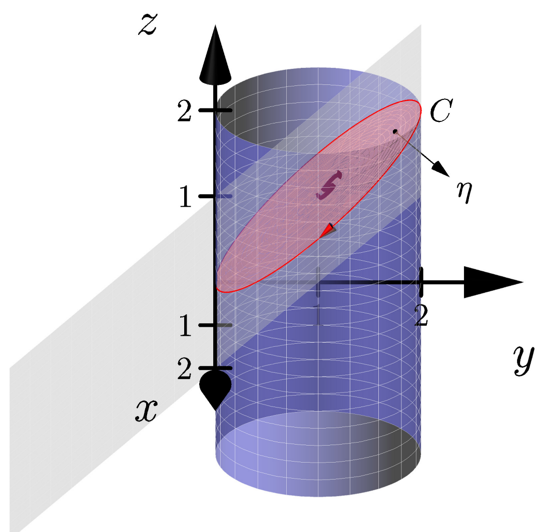

Figura 3: Una superficie S encerrada por la curva C intersección del plano $z=y$ con el cilindro $x^2+y^2=2y$.

Parametrizamos la superficie S, siendo ésta parte del plano $z=f(x,y)=y$, mediante $\phi(x,y)=(x,y,y)$, tomando $\text{Dom}\, f = \mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2y\}$. El Producto Vectorial Fundamental resulta $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (0,-1,1)$, así que nuestra parametrización invierte la orientación. Como $\mathbf{F}$ es $\mathcal{C}^1$, aplicando el teorema de Stokes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} &= \iint_{S} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{D}} (0,0,-1) \cdot (0,-1,1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= -\iint_{\mathcal{D}} -\,\mathrm{dA} = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{dA} = \operatorname{Area}(\mathcal{D}) = \pi.\end{aligned}$$

Note que anti-horario desde abajo es horario desde arriba.